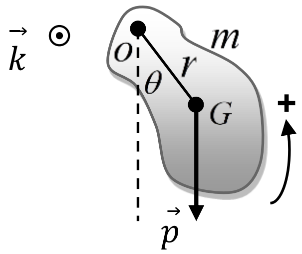
ثانيا: النواس الثقلي أو الفيزيائي

تعريف: هو جسم صلب منتظم الشكل أو غير منتظم، كتلته m يهتز تحت تأثير ثقله حول محور يمر من نقطة تعليقه o التي تبعد مسافة r عن مركز كتلته G (ش:II-13).



يمكن كتابة المعادلة التفاضلية لحركة النواس الإهتزازية باستعمال أي من الطرائق الثلاث السابقة,

الطريقة 1: دراسة الجملة - المبدأ الأساسي للتحريك

للجمل الدورانية نطبق نظرية العزوم :

$$\sum M_{/0}\left(\vec{F}\right) = J\,\ddot{\vec{\theta}}$$

$$\vec{OG} \wedge \vec{P} = J\,\ddot{\theta}\,\vec{k} \quad \Rightarrow \quad -mgr\sin\theta\,\vec{k} = J\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgr}{J}\sin\theta = 0$$

من أجل الإهتزازات الصغيرة $(\sin\theta \approx \theta)$ ، نجد المعادلة التفاضلية لحركة هذا الهزاز التوافقي:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr}{J}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

حيث نبض الهزاز هو:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{J}}$$

ودوره:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}}$$

الطريقة 2: دراسة الجملة – طريقة الطاقة (رايلي)

➢ الطاقة الحركية لجسم دوار :

$$E_C = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

➢ الطاقة الكامنة الثقالية : يمكن اعتبار الجسم الصلب عبارة عن نقطة مادية كتلتها m مركزة في مركز كتلته G، وبالتالي طاقته الكامنة تعطى بعلاقة مشابهة لعلاقة الطاقة الكامنة الثقالية في النواس البسيط:

$$E_P = mgh = mgr(1 - \cos\theta)$$

➢الطاقة الكلية (الميكانيكية) لهذا الهزاز التوافقي ثابتة:

$$E_T = E_C + E_P = Cte$$

$$= \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgr(1 - \cos\theta) = Cte$$

و بالتالي:

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgr - mgr\cos\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad J\dot{\theta}\ddot{\theta} + 0 + mgr\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\left(J\ddot{\theta} + mgr\sin\theta\right) = 0$$

لكن $\dot{\theta} \neq 0$، إذن:

$$J\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgr}{J}\sin\theta = 0$$

من أجل الإهتزازات الصغيرة $(\sin\theta \approx \theta)$

إذن:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr}{J}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

وهي نفسها المعادلة المستنتجة بطريقة المبدأ الأساسي للتحريك.

الطريقة 3: دراسة الجملة – طريقة لاغرانج

➢ **دالة لاغرانج**، من علاقات الطاقة السابقة:

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgr + mgr\cos\theta$$

- **معادلة لاغرانج:**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{'}{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(J\overset{'}{\theta}\right)+mgr\sin\theta=0 \Rightarrow J\ddot{\theta}+mgr\sin\theta=0$$

من أجل الإهتزازات الصغيرة $(\sin\theta\approx\theta)$ ، نجد نفس المعادلة:

$$\overset{''}{\theta}+\frac{mgr}{J}\theta=0 \Rightarrow \overset{''}{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$